

Matematică

clasa a VIII-a

I



ALGEBRĂ Capitolul 1. Numere reale

1.1. Mulțimi de numere reale: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$	7
1.2. Reprezentarea pe axă a numerelor reale. Compararea și ordonarea numerelor reale	13
1.3. Modulul unui număr real	20
1.4. Intervale în \mathbb{R} . Definiție, reprezentare pe axă	23
<i>Teste de evaluare</i>	29
<i>Fișă pentru portofoliul individual (A1)</i>	31
1.5. Operații cu numere reale	33
1.6. Raționalizarea numitorilor	43
<i>Teste de evaluare</i>	47
<i>Fișă pentru portofoliul individual (A2)</i>	49
1.7. Calcul cu numere reprezentate prin litere: adunarea, scăderea, înmulțirea, împărțirea, ridicarea la putere cu exponent întreg.....	51
1.7.1. Adunarea și scăderea	51
1.7.2. Înmulțirea, împărțirea, ridicarea la putere cu exponent întreg	54
1.8. Formule de calcul prescurtat	57
1.9. Descompunerea în factori	62
1.9.1. Metoda factorului comun.....	62
1.9.2. Utilizarea formulelor de calcul prescurtat.....	64
1.9.3. Descompunerea în factori folosind metode combinate.....	67
<i>Teste de evaluare</i>	70
<i>Fișă pentru portofoliul individual (A3)</i>	71
1.10. Rapoarte de numere reale reprezentate prin litere. Amplificarea. Simplificarea	73
1.11. Operații cu rapoarte de numere reale reprezentate prin litere	78
1.11.1. Adunarea și scăderea.....	78
1.11.2. Înmulțirea, împărțirea, ridicarea la putere. Expresii cu toate operațiile.....	83
<i>Teste de evaluare</i>	93
<i>Fișă pentru portofoliul individual (A4)</i>	95
1.12. Probleme cu caracter aplicativ.....	97
1.13. Probleme pentru performanță școlară și olimpiade.....	100

GEOMETRIE Capitolul 2. Corpuri geometrice

2.1. Puncte, drepte, plane	107
2.2. Piramida	112
2.3. Prisma	116

	<i>Teste de evaluare</i>	120
Respectiv	<i>Fișă pentru portofoliul individual (G1)</i>	121
2.4.	Pozițiile relative a două drepte în spațiu	123
2.5.	Unghiul a două drepte în spațiu. Drepte perpendiculare	126
	<i>Teste de evaluare</i>	129
	<i>Fișă pentru portofoliul individual (G2)</i>	131
2.6.	Pozițiile relative ale unei drepte față de un plan. Dreaptă paralelă cu un plan	133
2.7.	Dreaptă perpendiculară pe un plan. Distanța de la un punct la un plan. Înălțimea piramidei.....	137
	<i>Teste de evaluare</i>	141
	<i>Fișă pentru portofoliul individual (G3)</i>	143
2.8.	Pozițiile relative a două și trei plane. Plane paralele. Teoreme de paralelism	145
2.9.	Secțiuni paralele cu baza în corpurile studiate. Trunchiul de piramidă ...	149
	<i>Teste de evaluare</i>	153
	<i>Fișă pentru portofoliul individual (G4)</i>	155
2.10.	Probleme cu caracter aplicativ	157
2.11.	Probleme pentru performanță școlară și olimpiade	160

GEOMETRIE **Capitolul 3. Proiecții ortogonale**

3.1.	Proiecții de puncte, segmente și drepte pe un plan	165
3.2.	Unghiul unei drepte cu un plan. Lungimea proiecției unui segment ..	169
3.3.	Teorema celor trei perpendiculare	173
	<i>Teste de evaluare</i>	177
	<i>Fișă pentru portofoliul individual (G5)</i>	179
3.4.	Unghi diedru. Plane perpendiculare	181
3.5.	Calculul unor distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul corpurilor studiate	186
	<i>Teste de evaluare</i>	191
	<i>Fișă pentru portofoliul individual (G6)</i>	193
3.6.	Probleme cu caracter aplicativ.....	195
3.7.	Probleme pentru performanță școlară și olimpiade.....	197

SINTEZE **Capitolul 4. Variante de subiecte pentru teză**

Soluții	209
----------------------	-----

Tema 1.1. Mulțimi de numere reale: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Tema 1.2. Reprezentarea pe axă a numerelor reale.
Compararea și ordonarea numerelor reale

Tema 1.3. Modulul unui număr real

Tema 1.4. Intervale în \mathbb{R} . Definiție, reprezentare pe axă

Teste de evaluare

Fișă pentru portofoliul individual

Tema 1.5. Operații cu numere reale

Tema 1.6. Raționalizarea numitorilor

Teste de evaluare

Fișă pentru portofoliul individual

Tema 1.7. Calcule cu numere reale reprezentate prin litere

1.7.1. Adunarea și scăderea

1.7.2. Înmulțirea, împărțirea și ridicarea la putere

Tema 1.8. Formule de calcul prescurtat

Tema 1.9. Descompunerea în factori

Teste de evaluare

Fișă pentru portofoliul individual

Tema 1.10. Rapoarte de numere reale reprezentate prin litere.

Amplificarea. Simplificarea

Tema 1.11. Operații cu rapoarte de numere reale reprezentate prin litere

1.11.1. Adunarea și scăderea

1.11.2. Înmulțirea, împărțirea, ridicarea la putere. Expresii cu toate operațiile

Teste de evaluare

Fișă pentru portofoliul individual

Tema 1.12. Probleme cu caracter aplicativ

Tema 1.13. Probleme pentru performanță școlară și olimpiade

Mulțimi de numere reale: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Mulțimea numerelor naturale

Notații. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$ este mulțimea numerelor naturale;

$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$ este mulțimea numerelor naturale nenule.

Observație. Mulțimea numerelor naturale \mathbb{N} este *stabilă* în raport cu operațiile de *adunare* și *înmulțire*, adică suma a două numere naturale este un număr natural, iar produsul a două numere naturale este tot un număr natural.

Mulțimea numerelor întregi

Notații. $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, +1, +2, \dots\}$ este mulțimea numerelor întregi;

$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ este mulțimea numerelor întregi nenule.

Observația 1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ și $\mathbb{Z} = \{\pm n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{-n \mid n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}^*$.

Observația 2. Mulțimea numerelor întregi este *stabilă* în raport cu operațiile de *adunare*, *scădere* și *înmulțire*, adică suma, diferența și produsul a două numere întregi sunt numere întregi.

Mulțimea numerelor raționale

Notații. $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \right\}$ este mulțimea numerelor raționale;

$\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ este mulțimea numerelor raționale nenule.

Observația 1. Mulțimea numerelor raționale este *stabilă* în raport cu operațiile de *adunare*, *scădere*, *înmulțire* și *împărțire*, adică suma, diferența, produsul și câtul a două numere raționale (dintre care împărțitorul este nenul) sunt numere raționale.

Observația 2. Pentru orice număr rațional nenul q există o *unică fracție ireductibilă* $\frac{a}{b}$, cu $a \in \mathbb{Z}$ și $b \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $q = \frac{a}{b}$.

Observația 3. Un număr rațional poate fi reprezentat prin *fracții ordinare echivalente* sau printr-o *fracție zecimală finită* sau *periodică*.

Exemple. a. $\frac{12}{5} = \frac{24}{10} = 2,4$, fracție zecimală *finită*;

b. $\frac{250}{6} = \frac{125}{3} = 41,666\dots = 41,(6)$, fracție zecimală *periodică simplă*;

c. $\frac{1505}{6} = 250,8333\dots = 250,8(3)$, fracție zecimală *periodică mixtă*.

Mulțimea numerelor reale

Notații. \mathbb{R} este mulțimea numerelor reale;

\mathbb{R}^* este mulțimea numerelor reale nenule;

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ este mulțimea numerelor iraționale.

Observația 1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Respect pentru oameni și cărți

Observația 2. Orice număr irațional este reprezentat de o fracție zecimală infinită și neperiodică.

Observația 3. Reciproc, dacă un număr real este reprezentat de o fracție zecimală infinită și neperiodică, atunci numărul este irațional.



1. Dintre propozițiile de mai jos, menționați-le pe cele adevărate:

- | | | |
|-----------------------------------|------------------------------------|------------------------------|
| a) $5 \in \mathbb{N}$; | b) $\sqrt{23} \in \mathbb{R}$; | c) $8, (3) \in \mathbb{N}$; |
| d) $-3 \notin \mathbb{N}$; | e) $\sqrt{7} \notin \mathbb{Q}$; | f) $13 \in \mathbb{Z}$; |
| g) $\frac{7}{3} \in \mathbb{Z}$; | h) $\frac{5}{11} \in \mathbb{Q}$; | i) $2,25 \in \mathbb{N}^*$. |

2. Se consideră numerele -7 ; $5\frac{1}{4}$; -5 ; $-3,25$; $\sqrt{3}$; $\frac{1}{6}$; 0 ; $-\frac{2}{5}$; $+4$; $3,1(4)$.

Dintre aceste numere, scrieți pe caiet:

- | | |
|------------------------|-------------------------|
| a) numerele naturale; | b) numerele nenule; |
| c) numerele întregi; | d) numerele reale; |
| e) numerele raționale; | f) numerele iraționale. |

3. Fie $A = \left\{-17; 4\frac{1}{2}; 0, (5); \sqrt{4}; -2; \sqrt{13}; 0; 279; 5\frac{3}{13}; \frac{23}{14}\right\}$. Determinați:

- | | | |
|---|---|---------------------------------|
| a) $A \cap \mathbb{N}$; | b) $A \cap (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N})$; | c) $A \cap \mathbb{Q}$; |
| d) $A \cap \mathbb{Z}$; | e) $A \cap (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})$; | f) $A \setminus \mathbb{Q}^*$; |
| g) $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$; | h) $A \setminus \mathbb{R}_+$; | i) $A \setminus \mathbb{R}$. |

4. Dintre următoarele fracții, indicați fracțiile echivalente cu $\frac{3}{5}$.

- | | | | | | |
|---------------------|----------------------|---------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| a) $\frac{6}{10}$; | b) $\frac{30}{25}$; | c) $\frac{9}{25}$; | d) $\frac{30}{50}$; | e) $\frac{12}{20}$; | f) $\frac{51}{85}$; |
|---------------------|----------------------|---------------------|----------------------|----------------------|----------------------|

5. Reprezentați sub formă de fracție ordinară fiecare dintre numerele :

- | | | |
|----------|-------------|--------------|
| a) 4,7; | b) 19,(5); | c) 0,5(3); |
| d) 5,25; | e) 32,(41); | f) 1,21(05). |

6. Reprezentați următoarele numere raționale sub formă de fracție ireductibilă:

- | | | |
|------------|-----------|--------------|
| a) 5,3; | b) 0,701; | c) 125,49; |
| d) 6,3(5); | e) 2,(4); | f) 13,7(14). |

7. Transformați următoarele fracții ordinare în fracții zecimale, amplificându-le, eventual, convenabil:

- | | | |
|---------------------|----------------------|--------------------|
| a) $\frac{7}{10}$; | b) $\frac{13}{25}$; | c) $\frac{5}{9}$; |
|---------------------|----------------------|--------------------|

d) $\frac{29}{5}$;

e) $\frac{11}{20}$;

f) $\frac{13}{6}$.

8. Transformați următoarele fracții ordinare în fracții zecimale, simplificându-le, eventual, mai întâi:

a) $\frac{34}{10}$;

b) $\frac{16}{8}$;

c) $\frac{412}{90}$;

d) $\frac{345}{100}$;

e) $\frac{21}{3}$;

f) $\frac{1224}{396}$;

g) $\frac{344}{1000}$;

h) $\frac{2}{25}$;

i) $\frac{23}{180}$.

9. Reprezentați următoarele numere raționale sub formă de fracție zecimală:

a) $\frac{9}{5}$;

b) $\frac{5}{11}$;

c) $\frac{707}{77}$;

d) $\frac{21}{6}$;

e) $\frac{202}{303}$;

f) $\frac{51}{37}$.

10. Determinați numerele naturale nenule a și b pentru care fracția ireductibilă $\frac{a}{b}$ este echivalentă cu fracția:

a) $\frac{34}{65}$;

b) $\frac{39}{65}$;

c) $\frac{13}{1001}$;

d) $\frac{85}{15}$;

e) $\frac{55}{1133}$;

f) $\frac{5151}{8585}$.

11. Reprezentați numerele raționale de mai jos sub forma $\frac{a}{b}$, unde $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$.

a) $\frac{-4}{-5}$;

b) $-\frac{37}{-11}$;

c) $-3\frac{5}{13}$;

d) 0,9(36);

e) 3,(7);

f) $-2,1(6)$.



12. Dați câte trei exemple de numere naturale n pentru care fracția $\frac{6}{n}$ este:

a) subunitară;

b) ireductibilă;

c) reductibilă;

d) zecimală finită;

e) periodică simplă;

f) periodică mixtă.

13. Determinați fracția ireductibilă echivalentă cu:

a) $\frac{474747}{252525}$

b) $\frac{123123}{234234}$

c) $\frac{49704970}{24572457}$.

14. Stabiliți valoarea de adevăr a fiecăreia dintre următoarele propoziții, enunțând câte un contraexemplu în cazul propozițiilor false.

a) „Orice număr natural este număr întreg.”

- b) „Orice număr real este număr rațional”.
 c) „Dacă un număr nu este rațional, atunci numărul nu este întreg.”
 d) „Orice număr întreg este număr natural.”
 e) „Orice număr rațional este număr real.”
 f) „Un număr este natural numai dacă numărul nu este întreg.”

15. Scrieți numărul 12 ca:

- a) suma a trei numere naturale;
 b) suma a două numere întregi din care unul negativ;
 c) diferența a două numere întregi; d) produsul a două numere raționale;
 e) produsul a două numere iraționale; f) suma a două numere iraționale.

16. Reprezentați ca sume de produse între cifrele din baza 10 și puterile ale lui 10 următoarele numere raționale:

- a) 739 ; b) 0,145 ; c) 15,34 ;
 d) 25,203 ; e) 210,08 ; f) 2,3(4).

Rezolvare. a) $739 = 7 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$

c) $15,34 = 1 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2}$ sau $15,34 = 1 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + \frac{3}{10^1} + \frac{4}{10^2}$.

17. Determinați, în fiecare din situațiile următoare, numerele întregi n pentru care relațiile următoare reprezintă propoziții adevărate:

- a) $\frac{14}{n-1} \in \mathbb{N}$; b) $\frac{18}{2n-1} \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$; c) $\frac{25}{4n+1} \in \mathbb{Z}$;
 d) $\frac{2n}{2n+1} \in \mathbb{Z}_+$; e) $\frac{3n+5}{3n-1} \in \mathbb{Z}$; f) $\frac{4n+11}{2n+3} \in \mathbb{N}$.

18. Scrieți câte două numere raționale cuprinse între $\frac{1}{7}$ și $\frac{1}{6}$ sub formă de:

- a) fracții ordinare;
 b) fracții zecimale periodice;
 c) fracții zecimale finite;

19. Determinați numerele naturale nenule x și y pentru care $\overline{xxxx}_{(3)} = \overline{yy}_{(9)}$.

20. Numerele 123,123123; 0,(142857) și 7,2(51) sunt scrise sub formă de fracție zecimală.

- a) Scrieți a 10-a cifră de după virgulă a fiecărui număr;
 b) Determinați a 100-a cifră de după virgulă a fiecărui număr.

21. Aflați cel mai mic număr natural nenul a pentru care fracțiile $\frac{a}{12}$, $\frac{a}{5}$ și $\frac{a}{36}$ reprezintă simultan numere naturale.

22. a) Determinați numerele naturale n pentru care fracția $\frac{n-3}{3n-2}$ este reductibilă.

- b) Determinați suma celor mai mici 2011 numerele naturale nenule n pentru care fracția $\frac{n-3}{3n-2}$ este reductibilă.

23. Aflați numerele naturale n pentru care fracțiile următoare sunt reducibile:

Respectiv oameni și cărți

a) $\frac{2n+3}{10n+8}$; b) $\frac{3n+2}{5n+8}$; c) $\frac{n+1}{n^2-3n+1}$.

24. Fie numărul $a = \frac{10^k - (-1)^{2k}}{9} + \frac{3n^2 + 4n + (-1)^{2k+1} \cdot n}{6}$, $n \in \mathbb{N}$ și $k \in \mathbb{N}$.

Arătați că $a \in \mathbb{N}$.

25. Demonstrați că numerele următoare sunt iraționale:

a) $\sqrt{3}$; b) $\sqrt{5}$; c) \sqrt{p} , unde p este un număr natural prim.

Rezolvare. a) Presupunem că $\sqrt{3}$ este număr rațional adică există fracția ireductibilă $\frac{a}{b}$

astfel încât $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$, echivalent cu $3 = \frac{a^2}{b^2}$, sau $3b^2 = a^2$. Deducem că $3|a$, adică

$a = 3a_1$, $a_1 \in \mathbb{N}^*$. Înseamnă că $3b^2 = (3a_1)^2$, echivalent cu $3b^2 = 9a_1^2$, sau $b^2 = 3a_1^2$.

Deducem că $3|b$, adică $b = 3b_1$, $b_1 \in \mathbb{N}^*$. Deci $\frac{a}{b} = \frac{3a_1}{3b_1}$ este fracție reducibilă, contrar

presupunerii făcute. Rezultă că presupunerea este falsă, deci $\sqrt{3}$ este număr irațional.

26. Stabiliți dacă numărul \sqrt{A} este rațional în fiecare din următoarele cazuri:

a) $A = 3^2 + 4^2 + 5^2$; c) $A = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 199$;
 b) $A = 5^{2006} + 7^{2007}$; d) $A = 199 + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 199)$.

27. Scrieți elementele mulțimilor:

a) $A = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \frac{4}{x+2} \in \mathbb{N} \right\}$; c) $C = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \frac{5}{x-2} \in \mathbb{Z} \right\}$;
 b) $B = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{7}{2x+1} \in \mathbb{Z} \right\}$; d) $D = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \frac{10}{3x+2} \in \mathbb{Z} \right\}$.

28. Scrieți elementele mulțimilor:

a) $A = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \frac{3x+11}{x+1} \in \mathbb{N} \right\}$; c) $C = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid 75 \leq 3x^2 \leq 300 \right\}$;
 b) $B = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{5x+13}{2x+1} \in \mathbb{Z} \right\}$; d) $D = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid 14 < x^2 + 4 \leq 40 \right\}$.

29. Determinați cifrele a, b, c astfel încât să aibă loc relațiile:

a) $\overline{4a1} : 3$; b) $\overline{71a5} : 9$; c) $\overline{62ab} : 15$;
 d) $\overline{2a3b} : 36$; e) $\overline{aa67b} : 45$; f) $\overline{99abc} : 198$.

30. Se consideră numărul $a = \frac{27}{45}$ și mulțimea $M = \{ a, 2a, 3a, \dots, 45a \}$.

- a) Determinați numărul de elemente din mulțimea $M \cap \mathbb{N}$;
 b) Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un element din M , acesta să fie număr natural.



31. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții, demonstrând propozițiile adevărate și oferind câte un contraexemplu în cazul propozițiilor false.

- a) Produsul oricăror două numere iraționale este un număr irațional.
- b) Suma dintre un număr rațional și un număr irațional este număr irațional.
- c) Produsul unui număr irațional cu un număr rațional nenul este număr irațional.
- d) Există două numere iraționale a căror diferență este număr rațional.
- e) Pătratul oricărui număr irațional este număr rațional.
- f) Orice număr irațional ridicat la puterea zero este număr natural.

Rezolvare. a) Propoziție falsă. Contraexemplu: $5 - \sqrt{3}$ și $5 + \sqrt{3}$ sunt numere iraționale, dar $(5 - \sqrt{3}) \cdot (5 + \sqrt{3}) = 5^2 - \sqrt{3}^2 = 25 - 3 = 22$, care nu este irațional.

32. a) Arătați că un număr este divizibil cu 8 dacă și numai dacă numărul format de ultimele trei cifre ale sale este divizibil cu 8.

b) Arătați că \overline{abc} este divizibil cu 8 dacă și numai dacă $4a + 2b + c : 8$.

33. Se consideră numărul $a = \overline{0,122333\dots \underbrace{nn\dots n}_n \dots}$.

- a) Demonstrați că a este număr irațional.
- b) Determinați a 100-a cifră de după virgulă a numărului a .

34. Determinați cifra x (din baza zece) astfel încât:

- a) $\sqrt{\frac{24x}{60}} \in \mathbb{N}$;
- b) $\sqrt{\frac{17x}{11}} \in \mathbb{N}$;
- c) $\sqrt{\frac{2x9x}{18}} \in \mathbb{N}$;
- d) $\sqrt{\frac{28x}{18}} \in \mathbb{Q}$;
- e) $\sqrt{\frac{7x}{12}} \in \mathbb{Q}$;
- f) $\sqrt{\frac{18x}{4}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

35. Demonstrați că următoarele numere sunt iraționale:

- a) $2 + \sqrt{3}$;
- b) $\frac{2}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}$;
- c) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$;
- d) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$;
- e) $\sqrt{7} - \sqrt{5}$;
- f) $2\sqrt{5} + 5\sqrt{2}$.

36. Demonstrați că, dacă n este un număr natural, atunci următoarele numere nu sunt raționale:

- a) $\sqrt{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 9 + 8}$;
- b) $\sqrt{5n + 2}$;
- c) $\sqrt{4n + 2}$.

Probleme de șapte stele

37. Fie $a \in \mathbb{Q}$. Dacă $7a \in \mathbb{Z}$ și $3a \in \mathbb{Z}$, demonstrați că $a \in \mathbb{Z}$.

38. Demonstrați că, dacă $n \in \mathbb{N}$ și $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$, atunci $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$.

39. Arătați că numărul $x = 0,101001000100001\dots$ este irațional.

40. Fie numerele $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ și $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ astfel încât $a + bx = c + dx$. Arătați că $a = c$ și $b = d$.

CAPITOLUL 1

Numere reale

1.1. Mulțimi de numere reale: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

- 1.** Adevărate: **a), b), d), e), f), h).** **4.** **a), d), e), f).** **5.** **a)** $\frac{47}{10}$; **b)** $\frac{176}{9}$; **c)** $\frac{48}{90}$; **d)** $\frac{525}{100}$; **e)** $\frac{3209}{99}$; **f)** $\frac{11984}{9900}$. **6.** **a)** $\frac{53}{10}$; **b)** $\frac{701}{1000}$; **c)** $\frac{12549}{100}$; **d)** $\frac{286}{45}$; **e)** $\frac{22}{9}$; **f)** $\frac{13577}{990}$. **7.** **a)** 0,7; **b)** 0,52; **c)** 0,(5); **d)** 5,8; **e)** 0,55; **f)** 2,1(6). **8.** **a)** 3,4; **b)** 2; **c)** 4,5(7); **d)** 3,45; **e)** 7; **f)** 3,(09); **g)** 0,344; **h)** 0,08; **i)** 0,12(7). **9.** **a)** 1,8; **b)** 0,(45); **c)** 9,(18); **d)** 3,5; **e)** 0,(6); **f)** 1,(378). **10.** **a)** $a=34, b=65$; **b)** $a=3; b=5$; **c)** $a=1; b=77$; **d)** $a=17; b=3$; **e)** $a=5; b=103$; **f)** $a=3; b=5$. **11.** **a)** $\frac{4}{5}$; **b)** $\frac{-37}{11}$; **c)** $\frac{-44}{13}$; **d)** $\frac{927}{990}$; **e)** $\frac{34}{9}$; **f)** $\frac{-13}{6}$. **12.** **a)** $n > 6$, de exemplu $n \in \{7, 8, 12\}$; **b)** $n \nmid 2$ și $n \nmid 3$, de exemplu $n \in \{5, 13, 77\}$; **c)** $n : 2$ sau $n : 3$, de exemplu $n \in \{2, 9, 14\}$; **d)** După aducerea la forma ireductibilă, numitorul fracției nu trebuie să aibă alți divizori primi diferiți de 2 și 5, de exemplu $n \in \{4, 10, 20\}$; **e)** În forma ireductibilă, numitorul fracției trebuie să nu aibă ca divizori primi pe 2 sau pe 5, de exemplu $n \in \{7, 9, 22\}$; **f)** În forma ireductibilă, numitorul fracției trebuie să aibă cel puțin un divizor prim dintre 2 și 5, dar să aibă și cel puțin un divizor prim diferit de 2 și 5, de exemplu $n \in \{35, 44, 90\}$. **13.** **a)** $\frac{47}{25}$; **b)** $\frac{41}{78}$; **c)** Simplificăm mai întâi cu 10001, apoi cu 7 și obținem $\frac{710}{351}$. **14.** **a)** F; **b)** F; **c)** A; **d)** F; **e)** A; **f)** F. **15.** **a)** $1+7+4$; **b)** $15+(-3)$; **c)** $2-(-10)$; **d)** $\frac{9}{2} \cdot \frac{8}{3}$; **e)** $\sqrt{8} \cdot \sqrt{18}$; **f)** $(12-\sqrt{2})+\sqrt{2}$. **17.** **a)** $n \in \{2, 3, 8, 15\}$; **b)** $n \in \{0, -1, -4\}$; **c)** $n \in \{0, 1, 6\}$; **d)** $n \in \{-1, 0\}$; **e)** $n \in \{0, 1\}$; **f)** $n \in \{-4, -1, 1\}$. **18.** **a)** Indicație: Aducem la același numitor, nu neapărat cel mai mic: $\frac{1}{7} = \frac{60}{420}$ și $\frac{1}{6} = \frac{70}{420}$; **b)** Indicație: Prin împărțire obținem că $\frac{1}{7} < 0,143$ și $\frac{1}{6} > 0,165$ astfel că putem scrie oricare fracții zecimale periodice cuprinse între 0,143 și 0,165; **c)** Aceeași indicație ca la **b)**. **19.** $\overline{xxxx}(3) = x \cdot 3^3 + x \cdot 3^2 + x \cdot 3 + x = 40x$, $\overline{yy}(9) = y \cdot 9 + y = 10y$. Rezultă că $y = 4x$, cu $x \in \{1, 2\}$ și $y \in \{1, 2, \dots, 8\} \Rightarrow x=1, y=4$ sau $x=2, y=8$. **20.** **a)** 0, 8, respectiv 5; **b)** 0, 8 respectiv 5. **21.** $a = [12, 5, 36] = 180$. **22.** **a)** Frația este reductibilă prin $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$ dacă și numai dacă d divide $n-2$ și $3n-2 \Leftrightarrow d | 3(n-3) - (3n-2) \Leftrightarrow d | 7 \Leftrightarrow d = 7$. Rezultă $n \in \{7k+3 | k \in \mathbb{N}\}$; **b)** Numerele sunt $7 \cdot 0 + 3, 7 \cdot 1 + 3, \dots, 7 \cdot 2010 + 3$. Suma lor este 14153418. **23.** **a)** $2n+3=7k \Rightarrow 2n=7k-3 \Rightarrow k=2h+1, h \in \mathbb{N} \Rightarrow n=7h+2$; **b)** Dacă fracția se reduce prin numărul natural prim d , atunci $d | 5 \cdot (3n+2) - 2 \cdot (5n+8)$, adică $d | 14$, deci $d=2$ sau $d=7$. Obținem $n = \text{par}$ sau $n=7k+4, k \in \mathbb{N}$; **c)** Dacă fracția se reduce prin numărul prim d , atunci ținând seama că $n^2 - 3n + 1 = (n+1)(n-4) + 5$, rezultă că $d=5$. Atunci $n=5k-1$, sau altfel scris, $n=5h+4$ unde $h \in \mathbb{N}$. **24.** $a = \frac{10^k - 1}{9} + \frac{n(n+1)}{2}$. Pentru orice $k \in \mathbb{N}$ avem $10^k - 1 : 9$ și pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem $n(n+1) : 2$ deci $a \in \mathbb{N}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și $k \in \mathbb{N}$. **26.** $\sqrt{A} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow A$ este

pătrat perfect. **a)** $A=50$ nu e pătrat perfect; **b)** A nu e pătrat perfect deoarece ultima sa cifră este 8; **c)** $A=100^2$; **d)** $A=199 \cdot 201$ nu e pătrat perfect. **27. a)** $A = \{0, 2\}$; **b)** $B = \{-4, -1, 0, 3\}$; **c)** $C = \{1, 3, 7\}$; **d)** $D = \{0, 1\}$. **28. a)** $x+1|8 \Leftrightarrow x \in \{0, 1, 3, 7\}$; **b)** $2x+1|21 \Leftrightarrow x \in \{-11, -4, -2, -1, 0, 1, 3, 10\}$; **c)** $5 \leq |x| \leq 10$; **d)** $x \in \{4, 5, 6\}$. **29. a)** $a \in \{1, 4, 7\}$; **b)** $a=5$; **c)** $b=0$, $a \in \{1, 4, 7\}$ sau $b=5$, $a \in \{2, 5, 8\}$; **d)** $3\bar{b}:4 \Rightarrow b=2$ sau $b=6$. Pentru $b=2$ trebuie să avem $a=2$ iar pentru $b=6$ trebuie $a=7$; **e)** $b=0$, $a=7$ sau $b=5$, $a=9$; **f)** Deoarece $\overline{99abc} = 198 \cdot 500 + \overline{abc}$, rezultă că $\overline{abc}:198$, deci $\overline{abc} = 198 \cdot k$, unde $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. **30. a)** $a = \frac{3}{5}$, $k \cdot a \in M \cap \mathbb{N} \Rightarrow k:5 \Rightarrow k \in \{5, 10, 15, \dots, 45\}$. Sunt 9 elemente; **b)** $\frac{1}{5}$. **31. a)** Fals, $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$; **b)** Adevărat. Presupunând contrariul, ar exista a, b, c astfel încât $a+b=c$, cu a și c raționale și b irațional. Atunci $b=c-a \in \mathbb{Q}$, contradicție; **c)** Adevărat. Presupunând $a \cdot b = c$ cu a irațional și b și c raționale ar rezulta $a = \frac{c}{b} \in \mathbb{Q}$, contradicție; **d)** Adevărat, de exemplu $\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0 \in \mathbb{Q}$; **e)** Fals, $\pi^2 \notin \mathbb{Q}$; **f)** Adevărat, $a^0 = 1 \in \mathbb{N}$. **32. a)** Numărul format din ultimele 3 cifre este egal cu restul împărțirii la 1000 a numărului considerat. Cum $1000:8$, rezultă concluzia; **b)** $\overline{abc} - (4a+2b+c) = 96a+8b:8$. **33. a)** Dacă a ar fi rațional atunci ar trebui ca scrierea sa ca fracție zecimală să fie periodică. Dacă presupunem că lungimea perioadei este p , luând $n=10^p$, obținem contradicție; **b)** în secvența $122333 \dots \overbrace{99 \dots 9}^{9 \text{ ori}}$ sunt 45 de cifre. Mai departe urmează secvența $\overbrace{1010 \dots 10}^{de 10 \text{ ori } 10}$ formată din 20 de cifre, secvența $\overbrace{1111 \dots 11}^{de 11 \text{ ori } 11}$ formată din 22 de cifre și secvența $\overbrace{1212 \dots 12}^{de 12 \text{ ori } 12}$. A 100-a zecimală a numărului a este a 13-a cifră a acestei secvențe, adică este cifra 1. **34. a)** $24x = 60 \cdot k^2 \Rightarrow x=0$; **b)** $17x = 11 \cdot k^2 \Rightarrow k=4$ și $x=6$; **c)** $2x9x:18 \Rightarrow x=8$, dar $\sqrt{\frac{2898}{18}} = \sqrt{161} \notin \mathbb{N}$. Problema nu are soluție; **d)** $\sqrt{\frac{28x}{18}} = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{2 \cdot 28x}$, deci $560 \leq 2 \cdot 28x = p^2 \leq 578$. Rezultă că $p=24$ și $x=8$; **e)** $\sqrt{\frac{7x}{12}} = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{3 \cdot 7x} \in \mathbb{Q}$, $x=5$; **f)** $x \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. **35. a)** Presupunând contrariul, $2+\sqrt{3} = a \in \mathbb{Q}$ ar rezulta $\sqrt{3} = a-2 \in \mathbb{Q}$, fals; **b)** $\frac{2}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} = \frac{5}{3} \cdot \sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; **c)** Dacă $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ ar fi rațional, atunci și pătratul său ar fi rațional, $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = 5 + 2\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$; **d)** $(\sqrt{7} - \sqrt{5})^2 = 12 - 2\sqrt{35} \notin \mathbb{Q}$; **e)** $(2\sqrt{5} + 5\sqrt{2})^2 = 70 + 20\sqrt{10} \notin \mathbb{Q}$. **36.** Pentru $a \in \mathbb{N}$, dacă a are ultima cifră 2, 3, 7 sau 8 atunci a^2 nu este pătrat perfect, astfel că \sqrt{a} nu este rațional. **a)** $u(1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 9 + 8) = 8$; **b)** $u(5n+2) = 2$ sau 7; **c)** $4n+2:2$ dar $4n+2 \not\equiv 2^2$, ca urmare $4n+2$ nu este pătrat perfect. **37.** Fie $a = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, $(p, q) = 1$. Din $7a \in \mathbb{Z}$ și $3a \in \mathbb{Z}$ rezultă $q|7$ și $q|3$, ceea ce implică $q=1$, adică $a \in \mathbb{Z}$. **38.** Fie $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, $(p, q) = 1$. Rezultă că $p^2 = n \cdot q^2$ adică $q|p^2$. Ținând seama de condiția $(p, q) = 1$, obținem $q|p$, și apoi $q=1$. Așadar $\sqrt{n} = p \in \mathbb{N}$.